IA : Tamba		Cellule : Mathématiques
Année : 2022-2023	**Classe : Seconde S**	Lycée : Koumpentoum

SERIE : INTERVALLES ET CALCUL APPROCHE

EXERCICE 1

1) Compléter le tableau suivant :

Valeur absolue $\lvert x-x_0\rvert \leq r$	Distance $d(x;x_0) \leq r$	Intervalle $[a;b]$	Encadrement $a \leq x \leq b$
$\lvert x+1\rvert \leq 2$			
			$-2 \leq x \leq 3$
	$d(x;-1) < 3$		
		$[-4;6]$	
		$]-\infty\,;\,-2[\bigcup]7\,;+\infty[$	

(x_0 Désignant le centre de $[a;b]$ et r sont rayon)

2) Soit $-7{,}4 \leq x \leq -7{,}3$.
   a) Donner une valeur approchée de x et préciser l'incertitude.
   b) Donner une valeur approchée de x par excès et par défaut et préciser dans chaque cas l'incertitude.
3) Traduire les phrases suivantes par un encadrement
   a) 1,21 est une valeur approchée de y à 2.10^{-2} près
   b) 2,25 est une valeur approchée de y par défaut à 10^{-3} près
   c) 3,12 est une valeur approchée de y par excès à 2.10^{-1} près.
4) a) Encadrer avec le plus de précision l'aire A = L×l Avec 3,15 est une valeur approchée de L à 5.10^{-2} prés et 2,35 est une valeur approchée de l à 5.10^{-2} prés
   b) Soit a un nombre réel tel que $|a-1| < \frac{1}{2}$. Montrer que $\frac{4}{3}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{a}$ à $\frac{2}{3}$ près.

EXERCICE 2

1) En utilisant le développement de $(a-b)^2$, démontrer que : $2ab \leq a^2+b^2$ (1).

En déduire que : $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. (2)

2) a, b, c sont des nombres quelconques. Ecrire deux autres inégalités analogues à

l'inégalité (1). En déduire que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

3) Soients $a\,; b\ et\ c$ trois réels strictement positifs. Démontrer que :
   a) $(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b \geq 6abc$
   b) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
   c) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
   d) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, **e**n déduire que $a+\frac{1}{a} \geq 2$
   e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

EXERCICE 3

1) a. On suppose $0 < a < 1$. Ranger dans l'ordre croissant 1 ; a ;$\sqrt{a}$;a^2 et $\frac{1}{a}$.

2) b. On suppose $a > 1$. Ranger dans l'ordre croissant 1 ; a ;$\sqrt{a}$;a^2 et $\frac{1}{a}$.

3) Soient a et b deux réels positifs non nuls. Montrer que :

Si $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$, alors $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 7$

4) Soient $1 \leq x \leq 2$ et $-3 \leq y \leq 4$

Encadrer : $x + y$, $x - y$, xy et $x^2 - y^2$

5) Sachant que $x \in [1\,;9]$ encadrer $\frac{3x+7}{2x+9}$

6) Montrer que si $x > 1$ alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

7) Démontrer que si $|x - 2| < \frac{1}{4}$ alors $|x^2 - 4| < \frac{17}{16}$

EXERCICE 4

I. Soient $x \in [-2\,;5]$ et $y \in [-3\,;\,-1]$

Simplifier $D = 2|2x + 7| - |3y| + 2|y + 8| - |2y - x|$

II. Soient x et y deux réels tels que $x \geq \frac{1}{2}$; $y \leq 1$ $etx - y = 3$

1. Calculer $E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$
2. Montrer que $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ et $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$
3. Calculer $F = |x + y - 5| + |x + y + 2|$

EXERCICE 5

1. Démontrer que, pour tout $x \neq -1$, on a: $\frac{1}{x+1} = 1 - x + \frac{x^2}{x+1}$
2. Démontrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, on a :

a) $0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$	b) $\frac{2}{3} \leq \frac{1}{x+1} \leq 2$	c) $0 \leq \frac{x^2}{x+1} \leq 2x^2$

3. Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, $1 - \mathrm{x}$ est une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{x+1}$ à $2x^2$ près.
4. Donner à l'aide de cette méthode des valeurs approchées des nombre suivants, en indiquant la précision : $A = \frac{1}{1{,}004}$ et $B = \frac{1}{0.9993}$

EXERCICE 6

A. Soit n un entier naturel, écrire sans radical au dénominateur $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

En déduire une expression simple de

$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

B. Soit n un entier naturel non nul.

1) Prouver que : $\sqrt{2n-1} \times \sqrt{2n+1} < 2n$

2) En déduire que : $\frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$

3) Démontrer que : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Bon courage !!